Matemática Multimídia

Análise de dados
e probabilidade

Guia do Professor

Vídeo

Amuleto Mágico

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar os quadrados mágicos, suas propriedades e curiosidades;
2. Trabalhar noções de equivalência algébrica e simetrias;
3. Utilizar raciocínio matemático e métodos algébricos para obter a constante mágica.

matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

Amuleto mágico

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Simetria; propriedade comutativa da soma; progressão aritmética simples; valor médio.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar os quadrados mágicos, suas propriedades e curiosidades;
2. Trabalhar noções de equivalência algébrica e simetrias;
3. Utilizar o raciocínio matemático e métodos algébricos para obter a constante mágica.

Sinopse
Uma jovem recebe um belo amuleto de presente de um amigo que explica algumas propriedades do quadrado mágico que o amuleto ostenta.

Material relacionado
Vídeos: *Para correr a São Silvestre*;
Experimento: *Padrões no plano*, *Quadrado mágico aditivo*, *Quadrado mágico multiplicativo*;

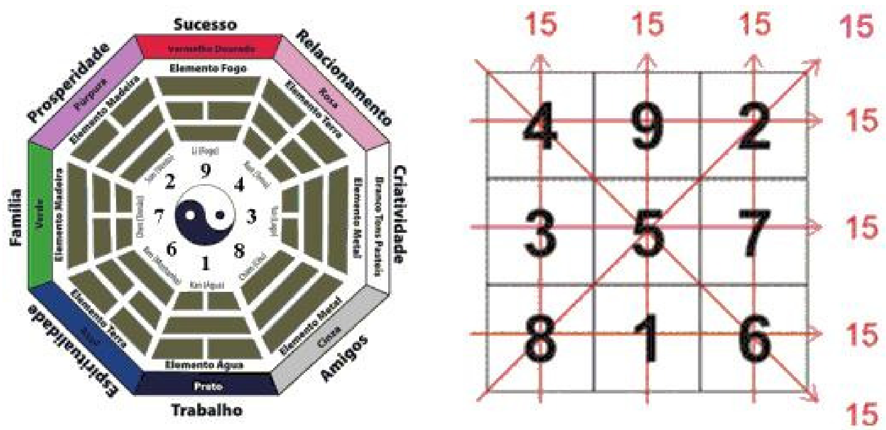
Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

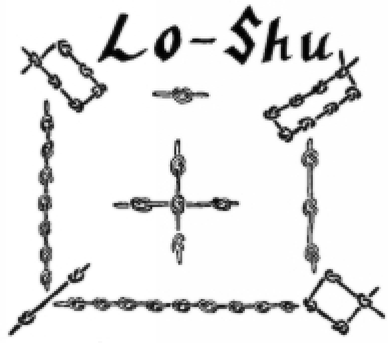
Sobre o programa

O amuleto dado de presente é um *ba Guá*, ou *Lo-Shu* cujo o centro possui um quadrado mágico. Esse quadrado é formado pela disposição de números como numa matriz, de forma que a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal seja sempre a mesma.



À esq.: Ba Guá com quadrado mágico, o número 5 está representado pelo simbolizado pelo yin yang (equilíbrio).
À dir.: O quadrado com as somas das linhas, das colunas e das diagonais, que são sempre iguais. A disposição dos números está espelhada em relação à do ba Guá.

Segundo uma lenda chinesa, o imperador Yu, em 2200 a.C. vislumbrou o quadrado mágico equivalente nas costas de uma tartaruga “divina” que saía do rio Amarelo. Há inscritos com a seguinte figura.

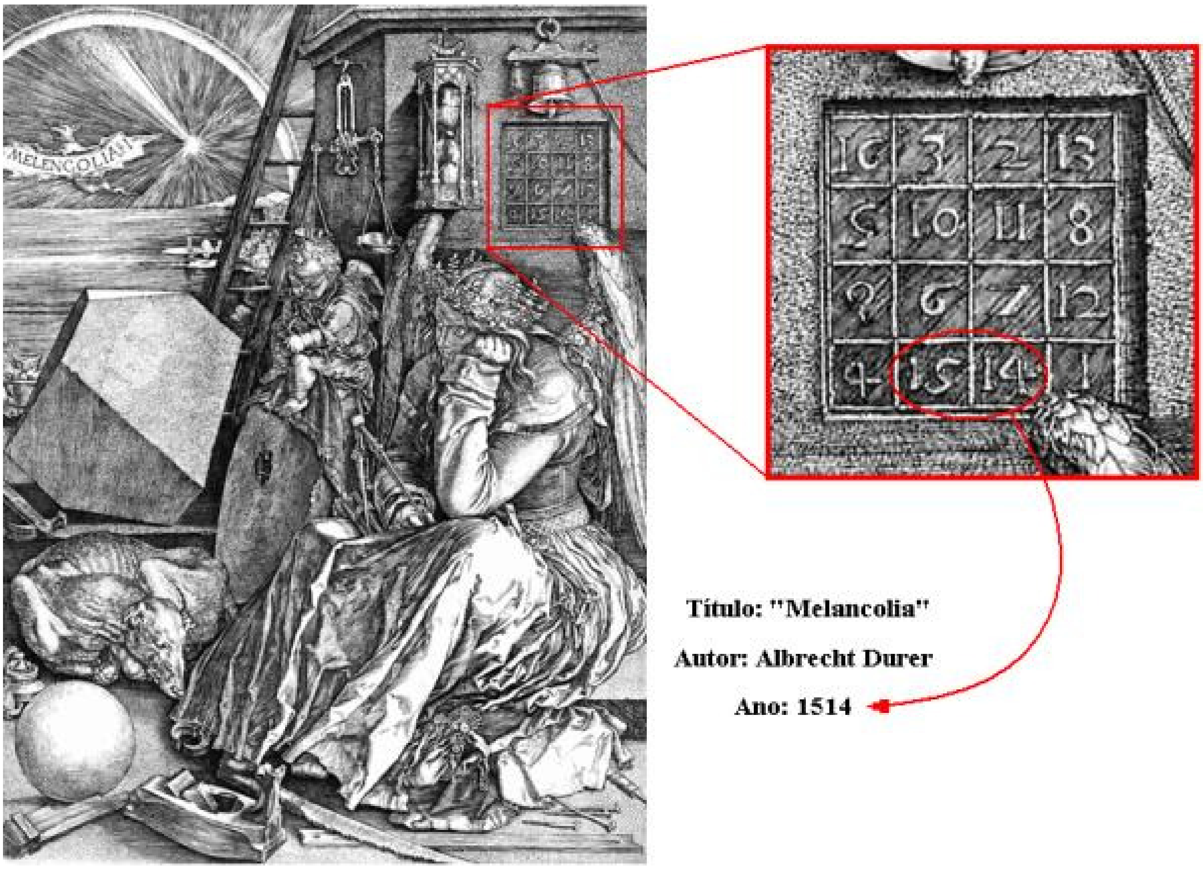


O vídeo mostra a construção de um quadrado mágico de ordem 3 e mostra que essa disposição é a única possível para os números um a nove, a menos de variações por rotação e espelhamento. Isto é, há várias possibilidades de disposição na matriz, mas todas elas são equivalentes do ponto de vista algébrico (comutatividade da soma). Para mostrar que essa disposição é única, são feitos diversos somatórios, mostrando essa equivalência algébrica, isto é considerando a propriedade comutatividade da soma.

Tendo como motivação a gravura de Albrecht Durer chamada "Melancolia", na qual um quadrado mágico de ordem quatro faz parte do desenho, outros conceitos e curiosidades são apresentados: a constante mágica e como obtê-la; um modo de construir esse quadrado através de operações semelhantes à da construção do de ordem 3, isto é por inversões das diagonais e troca de simétrica de colunas; o detalhe genial de Dürer mostrando ano do desenho (1514) inserido na gravura; a grande quantidade de quadrados de ordem maior que 4 e não equivalentes que se pode obter; e a simetria por inversão.

Para obter a constante mágica são utilizados os seguintes conteúdos: progressão aritmética simples e o cálculo de um valor médio.

Algumas curiosidades dos quadrados mágicos de ordens superiores são citadas, como por exemplo, a grande quantidade de quadrados não equivalentes de ordens maiores que 3, que os astrólogos europeus da idade média descobriram vários destes quadrados mágicos e os associavam aos astros: de ordem 3, Saturno; de ordem 4, Júpiter; de ordem 5, Marte; de ordem 6, Sol; de ordem 9, Lua.



Existem alguns algoritmos para se obter quadrados mágicos de uma infinidade de ordens. O jovem do vídeo apresentou um algoritmo para colocar os números de um a nove no quadrado de ordem três e outro para colocar os números de um a 16 no de ordem quatro.

O cálculo da chamada *Constante Mágica* é facilmente obtida, pensando-se em termos de média aritmética da,seguinte maneira. Os quadrados mágicos normais de ordem n têm os números de 1 a n^2 para serem colocados no quadrado. Este quadrado tem n linhas, n colunas e duas diagonais com n elementos cada uma que somam exatamente o mesmo valor. Em outras palavras deve haver $2n+2$ somas iguais.

A soma total da P.A. $\{1,2, \ldots, n^2\}$ é

$$S_{\text{total}} = \frac{n^2\left(n^2+1\right)}{2}.$$

O valor médio para cada célula do quadrado mágico será

$$V_m = S_{total} / n^2 = (n^2 + 1)/2$$

Como temos para cada soma de linhas, colunas e diagonais n termos, então a Constante Mágica é dada por

$$S_{mágica} = nV_m$$

Ou seja, $$S_{mágica} = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Observe que este número é sempre natural. Além disso, se n for ímpar, ele também será ímpar.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Recomendamos que os alunos desenvolvam a atividade *Quadrado mágico aditivo* antes de assistir esse vídeo, caso contrário eles terão a resposta ao desafio sem ter percebido as possibilidades, as dificuldades e as equivalências do quadrado de ordem 3. Dessa forma, o vídeo pode servir de recordação da atividade feita e ponto de partida para explorar Quadrados mágicos de ordem maiores que 3.

Durante a execução

Quando o vídeo estiver tratando do quadrado mágico normal de ordem 3, reforçar, escrevendo no quadro por exemplo, a constante mágica 15, e que o quadrado é único. Igualmente quando tratar do quadrado de ordem 4, reforçar a constante mágica 34 e que há 880 quadrados algebricamente distintos.

Depois da execução

Estimular os alunos a construir quadrados mágicos com outras seqüências de números.

No caso de um quadrado mágico de ordem 3, os experimentos *Quadrado mágico aditivo* e *Quadrado mágico multiplicativo*, devem ter mostrado, antes do vídeo, que a construção do quadrado por tentativa e erro pode ser demorada, mesmo o mais simples de ordem 3 com números de um a nove.

Exercício. Mostre que um quadrado mágico normal de ordem três não pode ter o número 1 nos cantos.

Solução. Basta observar que os números dos cantos devem entrar em três somas, a saber, a da linha, da coluna e da diagonal. No entanto a decomposição da constante mágica 15 em três números de um a nove só tem o número 1 em duas somas: 9+5+1=15 e 8+6+1=15. Desta forma sabemos que o número 1 não pode estar nos cantos. Pelo mesmo motivo, não pode estar no centro, pois o número central participa da soma da sua linha, da sua coluna e das duas diagonais, isto é de mais de duas somas.

Podemos preencher um quadrado mágico com os termos de uma P.A. qualquer. Vejamos o de ordem 3. Sejam a_1, a_2, até o último termo a_9 os números da P.A. A soma dela vale $S_9=9(a_1+a_9)/2$. O termo central da P.A. (o quinto termo) também deve ocupar o centro do quadrado mágico. E a constante mágica deverá ser, pela demonstração apresentada acima, $C=3(a_1+a_9)/2$. Assim, o quadrado mágico será equivalente ao seguinte:

a_4	a_9	a_2
a_3	a_5	a_7
a_8	a_1	a_6

Observe que os índices dos termos são exatamente os números do quadrado mágico de ordem 3. Daí fica bem fácil construir as outras disposições equivalentes do quadrado mágico de ordem 3.

Quadrado mágico normal de ordem 4

Para um quadrado mágico normal de ordem 4, a dificuldade é ainda maior. O professor pode dar um tempo para os alunos tentarem outro quadrado mágico que não seja o mostrado no vídeo. Se conseguirem, provavelmente é uma variação de disposição do visto no vídeo.

Em seguida o professor deve aproveitar para fazer algumas tentativas ele mesmo para enfatizar que não é uma tarefa simples obter um quadrado mágico normal de ordem quatro. Ou seja, não existe um método simples geral (um algoritmo geral) para se obter qualquer quadrado mágico. No entanto as observações abaixo podem ajudar nesta tarefa. Vamos considerar o caso do quadrado normal de ordem 4.

Temos os números 1,2,3,...,15,16 para colocar no quadrado. A soma total destes números (soma de uma P.A.) é 8x17 e as somas de cada linha, coluna ou diagonais devem ser 8x17/4=34. Esta é a constante mágica. Isto significa que devemos pegar quatro números distintos de 1 a 16, tais que a soma é 34.

Quantos arranjos de quatro números podemos formar a partir dos dezesseis números?

$$A_{16}^{4} = \frac{16!}{12!} = 16\times15\times14\times13 = 43680$$

Obviamente só precisamos de quatro arranjos (um para cada linha) e nem todos estes 43680 somam exatamente 34. A ordem dos números é importante no quadrado mágico, mas para a soma não, pois a ordem dos fatores não altera a soma. Por isto calculamos a combinação de 16, 4 a 4.

$$C_{16}^{4} = \frac{16!}{12!4!} = \frac{16\times15\times14\times13}{4\times3\times2\times1} = 1820$$

A menor soma possível, de quatro números dentre os 16, que podemos fazer é 1+2+3+4=10, e a maior é 13+14+15+16=58. Podemos dizer que a soma de quatro números vai variar de 10 a 58, isto é, 49 valores, mas só queremos a soma 34 que é exatamente a mediana do intervalo das somas. Algumas das somas têm várias combinações possíveis, enquanto outras só têm uma, como por exemplo, são as somas extremas 10 e 58. No entanto, em média há $1820/49 \simeq 37$ combinações possíveis para cada soma. Por outro lado, temos que fazer apenas 10 somas, das quatro linhas, das quatro colunas e das duas diagonais.

Com tantas possibilidades precisamos fazer algumas limitações para facilitar a descoberta de um quadrado mágico de ordem quatro ou recorrer ao computador para tal. O vídeo apresenta um algoritmo simples, sem justificá-lo matematicamente. Fazemos aqui uma breve explicação.

A disposição inicial é a tabela com a lista de quatro em quatro nas linhas:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

As somas dessas linhas são 10, 26, 42 e 58; das colunas são 28, 32, 36 e 40; e das diagonais são 34. As diagonais somam 34, pois os seus números são os números a cada quatro elementos da P.A. começando pelo um na diagonal principal e pelo quatro na diagonal secundária formando duas outras P.A. de razão 5 e 3 respectivamente. Para compensar as linhas de cima que somam menos de 34 e as linhas de baixo que somam mais de 34, é feita a troca da ordem das diagonais. Isto não altera o valor das somas das diagonais.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Pronto! Agora todas as linhas e colunas também somam 34. O quadrado mágico da gravura Melancolia tem as colunas internas trocadas, o que não altera as somas. Aliás, há várias outros quadrados mágicos obtidos a partir do acima fazendo transformações como a troca de quadrantes, de linhas etc.

Exercício. Verificar que os sub quadrados de ordem 2 dos quatro quantos e do centro têm células que somam 34, a mesma constante mágica do quadrado normal de ordem 4. Esta é uma propriedade particular deste quadrado mágico, isto é, nem todos os quadrados mágicos de ordem quatro têm esta propriedade.

Quadrado mágico normal de ordem 5

O quadrado mágico normal de ordem 5 tem um procedimento (algoritmo) descoberto por de La Loubére em 1687 para quadrados de ordem ímpar. Começando pelo número 1 no topo central do quadrado, visualizamos o quadrado como se fosse um toro, identificando a fronteira de cima com a de baixo e a fronteira direita com a esquerda e preenchemos um percurso (1-->2-->3....-->25) em diagonal. Ao encontrar uma célula já preenchida, recomeçar a diagonal na célula abaixo. Veja a quadrado abaixo. Alguns números ao redor do quadrado mágico servem para mostrar as identificações de fronteiras:

		18	25	2	9	11
	17	24	1	8	15	17
16	23	5	7	14	16	23
22	4	6	13	20	22	4
3	10	12	19	21	3	10
9	11	18	25	2	9	
	17	24	1	8		

Este procedimento pode ser feito para qualquer quadrado mágico de ordem ímpar com os números em progressão aritmética. Observe que o termo central da P.A., 13, está no centro deste quadrado mágico.

Exercício. Verificar que todos os números deste quadrado mágico diametricamente opostos ao centro somam exatamente 26.

Bibliografia

H. EVES, Introdução à História da Matemática, Editora da Unicamp, 1995.

R.M. BARBOSA, Aprendendo com padrões mágicos, SBEM-SP, Nº 1, 2000.

E. Lucas, Quadrados mágicos de Fermat (Jogos Matemáticos III), Editec, 2008.

M. TAHAN, As maravilhas da matemática, Bloch Editoras, 2ª edição, 1973.

Ficha técnica

Autores: *Waldeci Ribeiro do Nascimento, Gilberto José Soares e Samuel Rocha de Oliveira*
Revisão *Adolfo Maia Jr.*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*